درسنامه و نکات کلیدی　　**(فصل اول)**　　سال نهم

مجموعه ها

مجموعه : به دسته ای از اشیاء کاملا مشخص و دو به دو متمایز (غیر تکراری) مجموعه می گویند.

مثال : کدام یک از عبارات زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟

الف) ۳ عدد زوج متوالی (مجموعه نیست)　　ب) ۴ گل زیبا (مجموعه نیست)　　ج) اعداد اول کمتر از ۱۰ (مجموعه است)

نکته : مجموعه را به صورت آکولاد $\{\ \ \}$ نشان می دهند و مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند.

نکته : به هر یک از اعداد و عبارت داخل مجموعه عضو می گویند و علامت عضو بودن به صورت $\in$ و علامت عضو نبودن به صورت $\notin$ می باشد.

نکته : تعداد عضو های هر مجموعه مانند A را به صورت $n(A)$ نشان می دهند.

مثال : با توجه به مجموعه ی A درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$A = \{۳ , \{۴ , ۵\} , ۶\}$　　$n(A) = ۴$ ✗　　$۳ \in A$ ✓　　$۴ \notin A$ ✓　　$\{۶\} \in A$ ✗

مجموعه تهی : مجموعه ای که دارای هیچ عضوی نباشد. علامت مجموعه تهی به صورت $\{\ \ \}$ یا $\emptyset$ می باشد.

مثال : کدام یک از مجموعه های زیر مجموعه تهی است؟

الف) اعداد طبیعی کمتر از ۴ $\{۱ , ۲ , ۳\}$　　ب) اعداد صحیح کمتر از صفر $\{\cdots , -۳ , -۲ , -۱\}$　　ج) اعداد طبیعی بین ۴ و ۵ $\{\ \ \}$ ✓

دو مجموعه برابر : دو مجموعه A و B را برابر می گویند که هر عضو مجموعه A در مجموعه B و هر عضو مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشد. مانند دو مجموعه ی مقابل :

$$A = \{۴ , ۳ , ۱\} \quad و \quad B = \left\{\sqrt{۹} , ۷^{۰} , \frac{۲۰}{۵}\right\}$$

مثال : دو مجموعه ی زیر برابرند. مقدار x و y را به دست آورید؟

$\{x - ۷ , ۳\} = \{۴ , y\}$　　$x - ۷ = ۴ \Rightarrow x = ۱۱ , y = ۳$

زیر مجموعه : مجموعه A زیر مجموعه B است هر گاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و آن را به صورت $A \subseteq B$ نشان می دهند. اگر A زیر مجموعه B نباشد آن را به صورت $A \nsubseteq B$ نشان می دهند.

نکته : اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه رابطه های مقابل همواره برقرار است :　　$A \cap B = A$　و　$A \cup B = B$

نکته : برای پیدا کردن تعداد زیر مجموعه ها از رابطه ۲^{n} استفاده می کنیم. اگر تعداد زیر مجموعه را داشته باشیم و تعداد عضو را خواسته باشند عدد داده شده را تجزیه می کنیم.

مثال : الف) مجموعه ی $A = \{۱ , ۲ , \ldots , ۱۰\}$ چند زیر مجموعه دارد؟　　$n(A) = ۱۰ \Rightarrow ۲^{n} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ زیر مجموعه

ب) یک مجموعه دارای ۳۲ زیر مجموعه است. این مجموعه دارای چند عضو است؟　　$۳۲ = ۲^{۵} \Rightarrow$ ۵ عضو دارد

سال نهم **(فصل اول)** **درسنامه و نکات کلیدی**

مجموعه ها

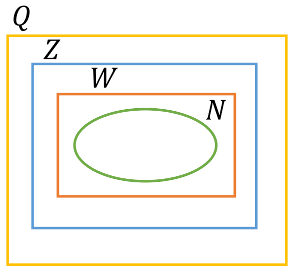
نمایش مجموعه ها : الف) مجموعه اعداد طبیعی : $N=\{۱,۲,۳,\cdots\}$ ب) مجموعه اعداد حسابی : $W=\{۰,۱,۲,\cdots\}$

ج) مجموعه اعداد صحیح : $Z=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\cdots\}$ د) مجموعه اعداد طبیعی زوج : $E=\{۲,۴,۶,\cdots\}$

ه) مجموعه اعداد طبیعی فرد : $O=\{۱,۳,۵,\cdots\}$ و) مجموعه اعداد گویا : $Q=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,b\in Z, b\neq ۰\right\}$

نمودار ون مجموعه ها : مجموعه ها را می توان داخل یک منحنی بسته ای نشان داد.

نکته : نمودار ون مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است :



$N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q$

مثال : الف) عضوهای هر مجموعه را بنویسید؟

$B=\{۲x-۱\mid x\in N, x\leq ۳\}=\{۱,۳,۵\}$

$\{۲(۱)-۱,۲(۲)-۱,۲(۳)-۱\}$

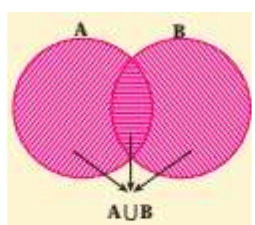
$A=\{x\mid x\in Z,-۴\leq x<۲\}=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$

ب) صورت ریاضی هر مجموعه را بنویسید؟

$D=\{۴,۸,۱۲,\ldots\}=\{۴x\mid x\in N\}$

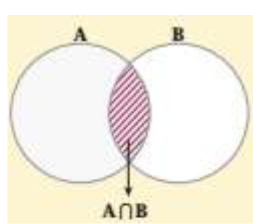
$C=\{-۶,-۵,\ldots,۳\}=\{x\mid x\in Z,-۷<x<۴\}$

اجتماع دو مجموعه : اجتماع دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند و اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A\cup B$ نمایش می دهند.



نمودار ون اجتماع دو مجموعه A و B

اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی که هم عضو A و هم عضو B باشند و اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت $A\cap B$ نمایش می دهند.



نمودار ون اشتراک دو مجموعه A و B

مجموعه ها

تفاضل دو مجموعه : مجموعه $A-B$ (A منهای B) شامل همه عضوهایی است که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

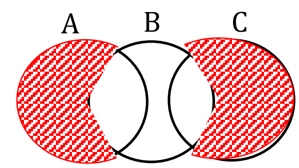
نمودار ون تفاضل دو مجموعه A و B

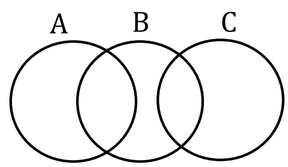
مثال : اگر مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{x \mid x\in Z, -۲<x\leq ۲\}$ و $C=\{x^۲+۱ \mid x\in A\}$ باشد. عضوهای هر مجموعه را بنویسید؟

$B=\{-۱,۰,۱,۲\}$ $C=\{۱^۲+۱,۲^۲+۱,۳^۲+۱\}=\{۲,۵,۱۰\}$

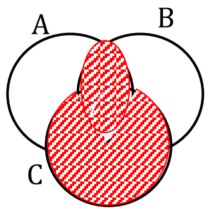
ب) $B\cap(A\cup C)=\{-۱,۰,۱,۲\}\cap\{۱,۲,۳,۵,۱۰\}=\{۱,۲\}$ الف) $A-C=\{۱,۳\}$

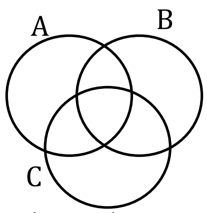
مثال : با توجه به هر شکل مجموعه های داده شده را هاشور بزنید؟





$(A\cup C)-B$





$(A\cap B)\cup C$

مجموعه و احتمال : برای به دست آوردن احتمال هر پیشامد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد}=\frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت های ممکن}}\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(B)}$$

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید؟

الف) احتمال آمدن عدد اول : $A=\{۲,۳,۵\}$ $p(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ب) احتمال آمدن عدد بزرگتر و مساوی ۵ : $B=\{۵,۶\}$ $p(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

مثال : در پرتاب دو تاس احتمال های زیر را به دست آورید؟ کل حالت ها $n(S)=۶^۲=۳۶$

الف) احتمال آمدن این که تاس اول عدد فرد و تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ بیاید :

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۳,۱),(۳,۲),(۵,۱),(۵,۲)\}\Rightarrow n(A)=۶\Rightarrow p(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ب) احتمال آمدن این که مجموع هر دو عدد تاس ۶ شود :

$$B=\{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}\Rightarrow n(B)=۵\Rightarrow p(B)=\frac{۵}{۳۶}$$

درسنامه و نکات کلیدی   (فصل دوم)   سال نهم

عددهای حقیقی

اعداد گویا : هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته : اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند : $\mathrm{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a , b \in Z, b \neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد کسری : مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک همان (ب . م. م) مخرج ها است.

مانند :

$$\left(-\frac{۵}{۱۲}\right) - \left(-\frac{۷}{۱۸}\right) = \frac{-۱۵ + ۱۴}{۳۶} = -\frac{۱}{۳۶} \qquad \text{مخرج ها } (\text{ب . م . م}) \Rightarrow (۱۲ , ۱۸) = ۳۶$$

ضرب اعداد کسری : فقط در ضرب می توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت ها در هم و مخرج ها در هم ضرب می شود.

مانند :

$$\left(-\frac{\cancel{۵}^{\,۱}}{\cancel{۱۲}_{\,۴}}\right) \times \left(-\frac{\cancel{۳}^{\,۱}}{\cancel{۱۰}_{\,۲}}\right) = +\frac{۱}{۸}$$

تقسیم اعداد کسری : تقسیم به ضرب تبدیل می شود. (کسر اولی در معکوس کسر دومی ضرب می شود)

مانند :

$$\left(+\frac{۴}{۷}\right) \div \left(-\frac{۵}{۲۱}\right) = \left(+\frac{۴}{\cancel{۷}_{\,۱}}\right) \times \left(-\frac{\cancel{۲۱}^{\,۳}}{۵}\right) = -\frac{۱۲}{۵} = -۲\frac{۲}{۵}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{۲}{۳}\right) \div \left[\left(-\frac{۱}{۱۵}\right) + \left(+\frac{۳}{۵}\right)\right] = \left(+\frac{۲}{۳}\right) \div \left(\frac{\overset{+۸}{\cancel{-۱ + ۹}}}{۱۵}\right) = \left(+\frac{۲}{\cancel{۳}_{\,۱}}\right) \times \left(+\frac{\cancel{۱۵}^{\,۵}}{۸}\right) = +\frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴} = ۱\frac{۱}{۴}$$

مقایسه کسرها : از دو روش می توان استفاده کرد :

الف) هم مخرج کردن کسرها : ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده سپس کسرها را مقایسه می کنیم.

مثال : کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{۲}{۵} , \frac{۳}{۴} , \frac{۱}{۲} , \frac{۷}{۱۰} \Rightarrow \frac{۸}{۲۰} , \frac{۱۵}{۲۰} , \frac{۱۰}{۲۰} , \frac{۱۴}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲}{۵} < \frac{۱}{۲} < \frac{۷}{۱۰} < \frac{۳}{۴} \qquad (۲ , ۴ , ۵ , ۱۰) = ۲۰$$

ب) تبدیل به عدد اعشار : (صورت بر مخرج تقسیم و خارج قسمت تا دو رقم اعشار ادامه می دهیم.)

مثال : کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{۲}{۵} , \frac{۳}{۴} , \frac{۱}{۲} , \frac{۷}{۱۰} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = ۰/۴۰ \quad , \quad \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \quad , \quad \frac{۱}{۲} = ۰/۵۰ \quad , \quad \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷۰ \quad \Rightarrow \frac{۲}{۵} < \frac{۱}{۲} < \frac{۷}{۱۰} < \frac{۳}{۴}$$

نکته) بین هر دو عدد گویا بی نهایت عدد گویا وجود دارد.

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل دوم)

سال نهم

عددهای حقیقی

پیدا کردن کسر هایی بین دو عدد کسری : چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی آن به صورت زیر است :

۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۱۵}{۲۰} \text{ و } \frac{۱۶}{۲۰} \Rightarrow \frac{۴۵}{۶۰} \text{ و } \frac{۴۸}{۶۰} \Rightarrow \frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۶}{۶۰} < \frac{۴۷}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰}$$

روش دوم

$$\frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۱۱}{۱۴} < \frac{۴}{۵}$$

روش اول

تبدیل کسر به اعداد اعشاری :

۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم : اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود آن کسر را مختوم نام دارد.

مانند : $\frac{۶}{۵} = ۱/۲$ و $\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ باشند آن کسر مختوم است.

مانند : $۸ = ۲^۳$ $\frac{۵}{۸}$ و $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ $\frac{۳}{۲۰}$

۲) عددهای اعشاری متناوب ساده : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود آن را متناوب ساده می گویند.

مانند : (خط تیره روی عدد به معنی تکرار یا گردش عدد است) $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۰۰۰ = ۰/\overline{۳}$ و $\frac{۵}{۱۱} = ۰/۴۵۴۵۰۰۰ = ۰/\overline{۴۵}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشند آن کسر متناوب ساده است.

مانند : $\frac{۶}{۱۳}$ و $۷۷ = ۷ \times ۱۱$ $\frac{۳}{۷۷}$

۳) عدد های اعشاری متناوب مرکب : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم های تکراری برسند به آن کسر متناوب مرکب می گویند.

مانند : $\frac{۷}{۲۲} = ۰/۳۱۸۱۸۰۰۰ = ۰/۳\overline{۱۸}$ و $\frac{۵}{۶} = ۰/۸۳۳۰۰۰ = ۰/۸\overline{۳}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشند آن کسر متناوب مرکب است.

مانند : $۷۵ = ۳ \times ۵^۲$ $\frac{۲}{۷۵}$ و $۱۴ = ۲ \times ۷$ $\frac{۵}{۱۴}$

درسنامه و نکات کلیدی **(فصل دوم)** **سال نهم**

عددهای حقیقی

اعداد گنگ یا اصم : اعداد که تعداد ارقام اعشاری آن ها نا متناهی و دارای دوره تناوب نباشند اعداد گنگ نام دارند.

نکته : مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی $\acute{Q}$ یا Q^C نشان می دهند.

نکته : اگر n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است.(یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند عدد گنگ هستند)

نکته : عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است. **(عدد π تا ۱۰ رقم اعشار :** $\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$ **)**

مثال : در جای خالی علامت ∈ یا ∉ قرار دهید.

۲ مربع کامل نیست: $۱-\sqrt{۲} \in \acute{Q}$ $\qquad ۳/۱۴ \notin \acute{Q}$ $\qquad \pi \in \acute{Q}$ $\qquad$ ۴۷ مربع کامل نیست: $\sqrt{۴۷} \in \acute{Q}$ $\qquad \cancel{\sqrt{۰/۳۶}}^{\,۰/۶} \notin \acute{Q}$ $\qquad -\frac{۲}{۵} \notin \acute{Q}$

نکته : بین دو عدد بی نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال : بین هر دو عدد داده شده دو عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۴}$ $\qquad \sqrt{۳} < \sqrt{۳/۱} < \sqrt{۳/۲} < \sqrt{۴}$

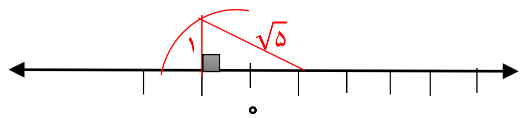
ب) ۲ و ۳ $\qquad ۲ = \sqrt{۴} < \sqrt{۵} < \sqrt{۶} < \sqrt{۹} = ۳$

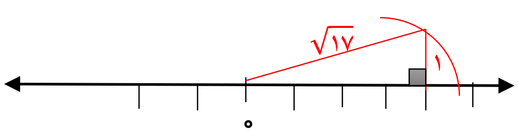
مثال : عدد $\sqrt{۱۰} - ۳$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

$$۳ - \cancel{\sqrt{۱۶}}^{\,۴} < ۳ - \sqrt{۱۰} < ۳ - \cancel{\sqrt{۹}}^{\,۳} \Rightarrow -۱ < ۳ - \sqrt{۱۰} < ۰$$

بین ۰ و ۱− قرار دارد

مثال : اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵} - ۱$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

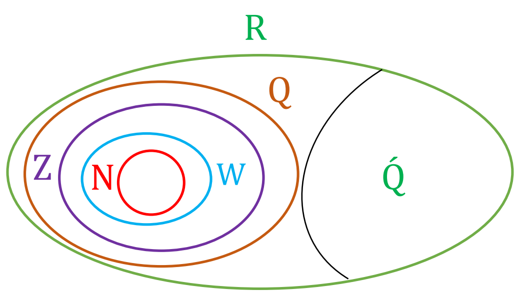




اعداد حقیقی : اجتماع مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد : $Q \cup \acute{Q} = R$

نکته : مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی R نشان می دهند.

نکته : نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی (N) و اعداد حسابی (W) و اعداد صحیح (Z) و اعداد گویا (Q) و اعداد گنگ $(\acute{Q})$ و اعداد حقیقی (R) به صورت زیر است :



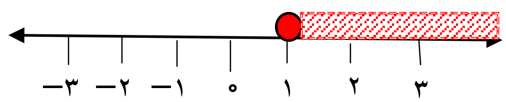
$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \quad , \quad \acute{Q} \subseteq R$$

عددهای حقیقی

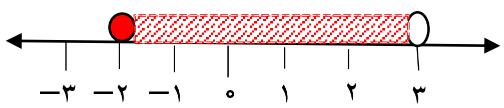
نمایش اعداد حقیقی روی محور : چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتدی است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و بدون سرکش دایره تو خالی قرار می دهیم)

مثال : مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

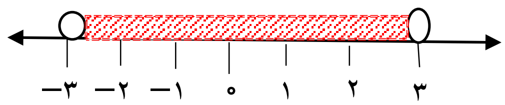
$B=\{x\in R \mid ۱\leq x\}$



$A=\{x\in R \mid -۲\leq x<۳\}$



مثال : مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.



$C=\{x\in R \mid -۳<x<۳\}$

قدرمطلق : فاصله ی نقطه نمایش یک عدد مانند a را از مبدا مختصات قدرمطلق a می نامیم و آن را به صورت $|a|$ نشان می دهیم.

خواص قدر مطلق : الف) قدر مطلق عدد مثبت برابر است با خود آن عدد : $x>۰\Rightarrow |x|=x$

ب) قدر مطلق صفر برابر با صفر است : $x=۰\Rightarrow |x|=۰$

ج) قدر مطلق عدد منفی برابر با قرینه آن عدد است : $x<۰\Rightarrow |x|=-x$

مثال : عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$\underbrace{|a^{۲۰}-a^{۳۰}|}_{\text{حاصل منفی}}=a^{۳۰}-a^{۲۰}$$

$$\underbrace{|\overset{\sqrt{۹}}{۳}-\sqrt{۲}|}_{\text{حاصل مثبت}}=۳-\sqrt{۲}$$

$$\left|۴\overset{-۸}{\overbrace{\overset{-۲۴}{\cancel{-۶\times\overset{۴}{\cancel{۲^{۲}}}}}\div\cancel{۳}}}+۲\right|=|-۲|=۲$$

مثال : اگر $x=\frac{۲}{۳}$ و $y=۳$ و $z=-\frac{۱}{۲}$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|-۶x-۴z|+۲|y|=\left|-۶\left(\frac{۲}{۳}\right)-۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right|+۲|۳|=|-۴+۲|+۲(۳)=۲+۶=۸$$

نکته : با توجه به مفهوم قدر مطلق همواره رابطه مقابل برقرار است : $\sqrt{a^{۲}}=|a|$

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{\left(۲-\sqrt{۵}\right)^{۲}}=\underbrace{|\overset{\sqrt{۴}}{۲}-\sqrt{۵}|}_{\text{حاصل منفی}}=-\left(۲-\sqrt{۵}\right)=\sqrt{۵}-۲$$

$$\sqrt{\left(۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}\right)^{۲}}=\underbrace{|\overset{\sqrt{۱۸}}{۳\sqrt{۲}}-\overset{\sqrt{۸}}{۲\sqrt{۲}}|}_{\text{حاصل مثبت}}=۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}$$

درسنامه و نکات کلیدی (فصل سوم) سال نهم

استدلال و اثبات در هندسه

استدلال : دلیل آوردن و استفاده از معلومات قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است.

اثبات : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوییم.

مثال نقض : برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

نکته : همواره برای اثبات یک مسئله نمی توان از رسم شکل یا شهود استفاده کرد زیرا ممکن است خطای دید در آن شکل وجود داشته باشد.

مثال : برای هر یک از مسئله های زیر یک مثال نقض بزنید :

الف) تمام اشکال هندسی گوشه یا زاویه دارند؟ دایره یک شکل هندسی است که دارای گوشه و زاویه نیست.

ب) تمام اعداد زوج اول هستند؟ عدد ۲ تنها عدد زوجی است که اول نیز است.

مثال : کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام غیر منطقی است :

الف) علی می گوید : هر وقت من درس نخواندم همان روز معلم از من سوال می کند؟ غیر منطقی

ب) تصادف منجر به مرگ در جادها ممکن است به دلیل نقض فنی ماشین باشد؟ منطقی

فرض مسئله : اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله : خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال : در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید :

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. فرض : خواص لوزی حکم : برابر بودن زاویه های رو به رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. فرض : دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع حکم : برابر بودن دو مماس

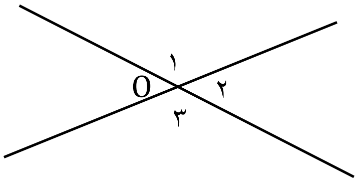
مثال : با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید :

الف) در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگر ند
لوزی نوعی مربع است
$\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگر ند

ب) هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است
مربع دارای زاویه قائمه است
$\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

استدلال و اثبات در هندسه

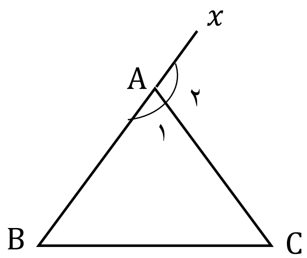
مثال : ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.



فرض : $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۳$ دو زاویه متقابل به راس حکم : $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰ \text{ درجه}\\ \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰ \text{ درجه}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ + \cancel{\hat{O}_۲} = \cancel{\hat{O}_۲} + \hat{O}_۳ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$$

مثال : ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.



فرض : $\hat{A}_۲$ زاویه ی خارجی مثلث حکم : $\hat{A}_۲ = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۸۰ \text{ درجه}\\ \hat{A}_۱ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \text{ درجه}\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_۱} + \hat{A}_۲ = \cancel{\hat{A}_۱} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها : دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند :

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته : سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه : دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند :

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث :

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

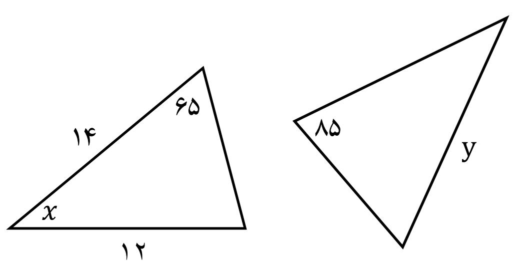
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته : در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال : دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

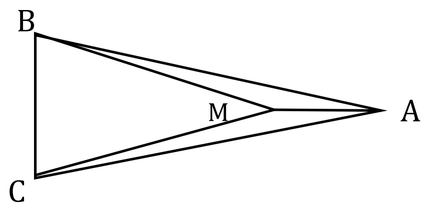
(مجوع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است) $۱۸۰ - (۸۵ + ۶۵) = ۳۰$

$x = ۳۰ \quad , \quad y = ۱۴$

استدلال و اثبات در هندسه

مثال : در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMC و AMB را بنویسید.

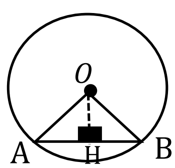
فرض : $AB = AC \,, MB = MC$ حکم : $\overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{AMC}$



فرض $AB = AC$
فرض $MB = MC$
ضلع مشترک $AM = AM =$
$\Rightarrow \overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{AMC}$ (ض ض ض)

مثال : با توجه به شکل زیر نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود آن وتر را نصف می کند.

فرض : O مرکز دایره و OH عمود بر AB حکم : $AH = HB$



شعاع دایره $OA = OB$
درجه $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$
ضلع مشترک $OH = OH =$
$\Rightarrow \overset{\triangle}{AHO} \cong \overset{\triangle}{BHO} \Rightarrow AH = HB$
(و ض) (اجزای متناظر)

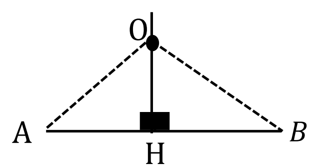
قدم های حل مسئله : برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است :

۱) درک و فهم مسئله ۲) رسم شکل ۳) نوشتن فرض و حکم مسئله ۴) راهبرد حل مسئله

مثال : نشان دهید هر نقطه روی عمود منصف قرار داشته باشد از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

گام اول : (درک و فهم مسئله) عمودمنصف خطی بر خط رسم شده عمود باشد و آن خط را نصف کند.

گام دوم : (رسم شکل)



گام سوم : (نوشتن فرض و حکم)

فرض : OH عمود منصف
حکم : $OA = OB$

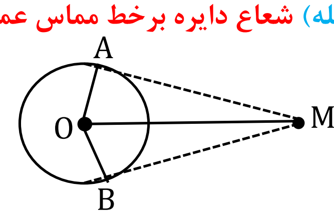
گام چهارم :(راهبرد حل مسئله)

فرض $AH = HB$
درجه $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$
ضلع مشترک $OH = OH =$
$\Rightarrow \overset{\triangle}{AHO} \cong \overset{\triangle}{BHO} \Rightarrow OA = OB$
(ض ز ض) (اجزای متناظر)

مثال : نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول : (درک و فهم مسئله) شعاع دایره برخط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

گام دوم : (رسم شکل)



گام سوم : (نوشتن فرض و حکم)

فرض : $OA = OB \,, \hat{A} = \hat{B} = 90$
حکم : $MA = MB$

گام چهارم : (راهبرد حل مسئله)

شعاع دایره $OA = OB$
درجه $\hat{A} = \hat{B} = 90$
ضلع مشترک $OM = OM =$
$\Rightarrow \overset{\triangle}{MAO} \cong \overset{\triangle}{MBO} \Rightarrow MA = MB$
(و ض) (اجزای متناظر)

استدلال و اثبات در هندسه

دو شکل متشابه : دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه ها تغییر نکرده باشد دو شکل متشابه می گویند.

نکته : دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته : دو مستطیل همواره متشابه نیست. (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکند)

نکته : دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیست. (چون ممکن است زاویه ها دو به دو برابر نباشند)

نکته : نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می گویند.

نکته : دو شکل هم نهشت همواره متشابه و نسبت تشابه آن ها عدد یک است.

مثال : دو مثلث ABC و DEF متشابه هستند. اگر اضلاع مثلث ABC به اندازه های ۳ و ۴ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه های $x-۳\,,۸\,,۲y$ باشند : (اضلاع دو مثلث از کوچک به بزرگ نوشته شده اند)

الف) مقدار x و y را به دست آورید.

تناسب اضلاع

$$\frac{۳}{۲y}=\frac{۴}{۸}=\frac{۶}{x-۳}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{۳}{۲y}=\frac{۴}{۸}\Longrightarrow ۸y=۲۴\Longrightarrow y=۳\\ \frac{۴}{۸}=\frac{۶}{x-۳}\Longrightarrow ۴x-۱۲=۴۸\Longrightarrow ۴x=۶۰\Longrightarrow x=۱۵\end{cases}$$

ب) نسبت تشابه دو مثلث را بنویسید. $\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

مثال : مقیاس نقشه ای ۱:۱۰۰۰۰۰ است. اگر طول جاده ای روی این نقشه ۱۲ سانتی متر باشد :

الف) طول واقعی جاده چند کیلو متر است؟

$$\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}=\frac{۱۲}{x}\Longrightarrow x=۱۲۰۰۰۰۰cm$$

$$۱۲۰۰۰۰۰\div۱۰۰۰۰۰=۱۲km$$

تبدیل واحد : هر کیلو متر ۱۰۰۰۰۰ سانتی متر است

ب) اگر اندازه ی یکی از زاویه های روی نقشه ۴۰ درجه باشد اندازه این زاویه در واقعیت چند درجه است؟

در دو شکل متشابه زاویه تغییر نمی کند. پس زاویه در واقعیت نیز ۴۰ درجه است.

نکته : در دو مثلث متشابه : الف) نسبت محیط و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف و میانه با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت مساحت با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال : نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۳}{۵}$ می باشد :

الف) نسبت میانه دو مثلث چند است؟ $\frac{۳}{۵}$

ب) نسبت مساحت دو مثلث چند است؟ $\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲=\frac{۹}{۲۵}$

توان و ریشه

توان : اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

مانند : $\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$ $\qquad$ $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^{\overset{\text{توان}}{۳}}$ (۴: پایه)

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^۷ \times ۴^۳ = ۴^{۱۰}$ $\qquad$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^۷ \times ۳^۷ = ۳۶^۷$ $\qquad$ $a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند : $\frac{۹^۵}{۹^۳} = ۹^۲$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند : $۲۰^۸ \div ۴^۸ = ۵^۸$ $\qquad$ $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند : $\underset{\text{تجزیه}}{۹^۲ \div ۲۷} = \cancel{(۳^۲)^۲}^{۳^۴} \div ۳^۳ = ۳$ $\qquad$ $\underset{\text{تجزیه}}{۴^۸} \times ۲^۳ = \cancel{(۲^۲)^۸}^{۲^{۱۶}} \times ۲^۳ = ۲^{۱۹}$

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند : $۹^۵ + ۹^۵ + ۹^۵ = ۳ \times \underset{\text{تجزیه}}{۹^۵} = ۳ \times \cancel{(۳^۲)^۵}^{۳^{۱۰}} = ۳^{۱۱}$ $\qquad$ $۲^۶ + ۲^۶ = ۲ \times ۲^۶ = ۲^۷$

توان منفی : برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود. $\qquad$ $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

نکته : تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته : اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$$۳^{-۴} \times ۳^۲ \div ۲۷ = \cancel{۳^{-۴} \times ۳^۲}^{۳^{-۲}} \div ۳^۳ = ۳^{-۵} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۵ \qquad ۵^{-۶} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۶$$

$$\frac{۴^۷ \times ۳^{-۶}}{۳^۳ \times ۴^{-۲}} = \frac{۴^۷ \times ۴^۲}{۳^۳ \times ۳^۶} = \frac{۴^۹}{۳^۹} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۹ \qquad \frac{۲۰^{-۶}}{۵^۲ \times ۴^{-۶}} = \frac{۵^{-۶}}{۵^۲} = ۵^{-۸} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۸$$

توان و ریشه

نکته : هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال : حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$۳^{۲} + ۵^{۰} - ۲^{-۲} = \overset{۱۰}{\cancel{۹ + ۱}} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰ - ۱}{۴} = \frac{۳۹}{۴} = ۹\frac{۳}{۴}$$

نماد علمی : برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته : به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^{n}$ است که در آن $۱ \leq a < ۱۰$ و nعدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت) : ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$\overset{\text{۴ رقم}}{۱۴۷۵۲}/۹۳ = ۱/۴۷۵۲۹۳ \times ۱۰^{۴}$$

$$\overset{\text{۸ رقم}}{۳۴۱۰۰۰۰۰۰} = ۳/۴۱ \times ۱۰^{۸}$$

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی) : ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$۰/۰۰۶۷۸ = ۶/۷۸ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\overset{\text{۶ رقم}}{۰/۰۰۰۰۰۳۷} = ۳/۷ \times ۱۰^{-۶}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$۵۳۰۰۰۰ \times ۰/۰۰۰۲۷ = \underline{۵/۳} \times \underline{۱۰^{۵}} \times \underline{۲/۷} \times \underline{۱۰^{-۴}} = ۱۴/۳۲ \times ۱۰^{۱} = ۱/۴۳۲ \times ۱۰^{۲}$$

ریشه گیری : الف) ریشه دوم اعداد : هر عدد دارای دو ریشه دوم است : (یکی مثبت و دیگری منفی)

مانند : (ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و ۴-)

$$۴^{۲} = (-۴)^{۲} = ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۱۶} = ۴ \text{ و } -۴$$

نکته : اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

ب) ریشه سوم اعداد : هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته : اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[۳]{a}$ نشان می دهیم.

فرجه یا ریشه

مانند :

$$(-۳)^{۳} = -۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳ \quad \text{و} \quad ۳^{۳} = ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

مثال : حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$۴\sqrt[۳]{-۱۲۵} = ۴ \times -۵ = -۲۰$$

$$\sqrt{۶۴ \times \frac{۱}{۹}} = ۸ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۰۱} \times \sqrt{\sqrt{۱۶}} = ۰/۱ \times ۲ = ۰/۲$$

$$\sqrt{۶۴} \times \sqrt[۳]{-۶۴} = ۸ \times -۴ = -۳۲$$

توان و ریشه

ضرب و تقسیم رادیکال ها : اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته : اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۳۲} = \sqrt[۳]{-۶۴} = -۴ \qquad ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۱۶} = ۲ \times ۴ = ۸$$

$$۹\sqrt[۳]{۵۴} \div ۳\sqrt[۳]{۲} = ۳\sqrt[۳]{۲۷} = ۳ \times ۳ = ۹ \qquad ۸\sqrt{۵۰} \div ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲۵} = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

ساده کردن رادیکال ها : بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضربی بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

مانند :

$$\sqrt[۳]{۸۱} = \sqrt[۳]{۳ \times \underset{\text{ریشه سوم}}{۲۷}} = ۳\sqrt[۳]{۳} \qquad \sqrt[۳]{۱۲۸} = \sqrt[۳]{۲ \times \underset{\text{ریشه سوم}}{۶۴}} = ۴\sqrt[۳]{۲} \qquad \sqrt{۲۰} = \sqrt{\underset{\text{ریشه دوم}}{۴} \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جمع و تفریق رادیکال ها : اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

مانند :

$$۵\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۵}$$

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۲\sqrt{۲} - \sqrt{۷۵} - ۳\sqrt{۷۲} + ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۲} - \overset{-۵\sqrt{۳}}{\cancel{\sqrt{۳ \times ۲۵}}} - \overset{-۱۸\sqrt{۲}}{\cancel{۳\sqrt{۲ \times ۳۶}}} + ۴\sqrt{۳} = -۱۶\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۱۸} + ۳\sqrt[۳]{-۵۴} + \sqrt[۳]{۱۶} - ۲\sqrt{۸} = \overset{۳\sqrt{۲}}{\cancel{\sqrt{۲ \times ۹}}} + \overset{-۹\sqrt[۳]{۲}}{\cancel{۳\sqrt[۳]{۲ \times -۲۷}}} + \overset{+۲\sqrt[۳]{۲}}{\cancel{\sqrt[۳]{۲ \times ۸}}} - \overset{-۴\sqrt{۲}}{\cancel{۲\sqrt{۲ \times ۴}}} = -\sqrt{۲} - ۷\sqrt[۳]{۲}$$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی : گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

مانند :

$$\frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲ \times \sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}\sqrt{۲}}{\underset{۳}{\cancel{۶}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \qquad \frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۳ \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

مانند :

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a^۲}} = \frac{۱ \times \sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{a^۲} \times \sqrt[۳]{a}} = \frac{\sqrt[۳]{a}}{a} \qquad ۳ - ۲ = ۱$$

$$\sqrt[۳]{\frac{۳}{۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۳} \times \sqrt[۳]{۷^۲}}{\sqrt[۳]{۷} \times \sqrt[۳]{۷^۲}} = \frac{\sqrt[۳]{۱۴۷}}{۷} \qquad ۳ - ۱ = ۲$$

عبارت های جبری

عبارت جبری : عبارتی است که از اعداد و متغیر (حروف انگلیسی) تشکیل شده است.

یک جمله ای : عبارت جبری که از دو قسمت تشکیل شده است (متغیر و عدد) و بین آن ها علامتی نباشد. (ضرب است)

مانند : $\frac{a}{۳}$, $-۴xy$

نکته : فرم کلی یک جمله ای به صورت ax^n است که a عدد حقیقی و x متغیر و n عدد حسابی است.

نکته : هر عدد حقیقی به تنهایی یک جمله ای است. چون متغیر آن صفر است.

نکته : اگردرعبارتی حروف زیر رادیکال یا حروف در مخرج یا حروف توان منفی داشته باشند. آن عبارت یک جمله ای نیست.

مثال : کدام عبارت یک جمله ای است.

$\frac{۳}{۲}$, $ab^{-۲}$, $۷\sqrt{x}$, $۴a+۲$ (دو جمله دارد) , $\sqrt{۳}xy^۲$

درجه یک جمله ای : توان متغیر را درجه آن یک جمله ای می گویند.

مثال : جدول زیر را کامل کنید.

یک جمله ای	ضریب	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به کل متغیرها
$-\frac{x^۲y^۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۲	۳	۲+۳=۵
$\sqrt{۲}x$	$\sqrt{۲}$	۱	۰	۱

یک جمله ای متشابه : یک جمله ای که متغیر و توان هر متغیر کاملا مثل هم باشند.

مانند : $(۴xy\ ,-۳yx)$ متشابه اند ولی $(-۵a^۲b\ ,\ ۳ab^۲)$ نا متشابه هستند.

جمع و تفریق یک جمله ای های متشابه : ضرایب یک جمله ای را با هم جمع و تفریق می کنیم و متغیرها را کنار آن ها می نویسیم.

مثال : عبارت جبری مقابل را ساده کنید.

$$\underline{-۵ab}+\underline{b}-۶+\underline{۳ab}+\underline{۲b}-\underline{۸b}=-۲ab-۵b-۶$$

ضرب و تقسیم یک جمله ای : در ضرب ضرایب در هم و متغیرها در هم ضرب می شود و در تقسیم ضرایب بر هم و متغیرها بر هم تقسیم می شوند.

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$\frac{۲۴x^۲y^۳z}{۳xyz}=۸xy^۲$$

$$۳a(-۴ab-c)=-۱۲a^۲b-۳ac$$

(فصل پنجم)

درسنامه و نکات کلیدی **سال نهم**

عبارت های جبری

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$-۶x^۲+۵x(x-۲y)+۸xy=\underline{-۶x^۲}+\underline{۵x^۲}-\underline{۱۰xy}+\underline{۸xy}=-x^۲-۲xy$$

درجه چند جمله ای : بزرگترین درجه نسبت به آن متغیر را در نظر می گیریم.

مثال : درجه نسبت به متغیر x در چند جمله ای $\sqrt{۵}x^۲y^۳z-۳xy+۲x^۳y^۲-x$ چند است؟ درجه x برابر ۳ است.

مثال : چند جمله ای زیر را نسبت به توان های نزولی a (از بزرگ به کوچک) مرتب کنید.

$$a^۲b-۳+۲a^۳b^۲-۵ab=۲a^۳b^۲+a^۲b-۵ab-۳$$

اتحاد جبری : اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که با ازای تمام مقادیر دلخواه برای متغیرها مقدار یکسانی داشته باشد به تساوی جبری آن ها اتحاد می گویند.

مثال : آیا $(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴$ یک اتحاد است؟چرا؟ به ازای مقادیر دلخواه امتحان می کنیم اگر دو طرف تساوی یکی شد این تساوی یک اتحاد است.

$$\begin{cases} x=-۴\Longrightarrow(-۴-۲)^۲=(-۴)^۲-۴(-۴)+۴\Longrightarrow ۳۶=۳۶ \\ x=۵\Longrightarrow(۵-۲)^۲=۵^۲-۴(۵)+۴\Longrightarrow ۹=۹ \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله ای : الف) جبری :

$$\begin{cases}(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲\\(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲\end{cases}$$

ب) کلامی : $\left(\text{جمله اول}+\text{جمله دوم}\right)^۲=\left(\text{جمله اول}\right)^۲+\text{دو برابر جمله اول در دوم}+\left(\text{جمله دوم}\right)^۲$

مثال : حاصل عبارت های جبری زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$(a-۲b)^۲=a^۲-۲(a)(۲b)+(۲b)^۲=a^۲-۴ab+۴b^۲$$

$$(xy+۳)^۲=x^۲y^۲+۲(xy)(۳)+۳^۲=x^۲y^۲+۶xy+۹$$

اتحاد مزدوج : الف) جبری : $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

ب) کلامی : $\left(\text{جمله اول}+\text{جمله دوم}\right)\left(\text{جمله اول}-\text{جمله دوم}\right)=\left(\text{جمله اول}\right)^۲-\left(\text{جمله دوم}\right)^۲$

مثال : حاصل عبارت های جبری زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$(a-۳b)(a+۳b)=a^۲-(۳b)^۲=a^۲-۹b^۲$$

$$\left(۲x+\frac{y}{۲}\right)\left(۲x-\frac{y}{۲}\right)=(۲x)^۲-\left(\frac{y}{۲}\right)^۲=۴x^۲-\frac{y^۲}{۴}$$

عبارت های جبری

اتحاد جمله مشترک : $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

مثال : حاصل عبارت جبری زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$(۲a-۳)(۲a+۴)=(۲a)^۲+(-۳+۴)(۲a)+(-۳\times ۴)=۴a^۲+۲a-۱۲$$

تجزیه عبارت جبری : نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل ضرب چند عبارت دیگر را تجزیه می گویند.

روش های تجزیه : الف) فاکتور گیری ب) با استفاده از اتحادها

فاکتور گیری : برای فاکتور گیری مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱) (ب.م.م) ضرایب را تعیین می کنیم

۲) حروف مشترک با توان کمتر را انتخاب می کنیم

۳) (ب.م.م) و حروف مشترک را به عنوان فاکتور می گیریم

۴) تمام جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و جواب را داخل پرانتز می نویسیم

مثال : عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$۱۶a^۲b+۴ab^۲-۸ab=۴ab(۴a+b-۲)$$

$$۱۸xy-۱۲y=\underbrace{۶}_{\text{(ب.م.م) اعداد}}\underbrace{y}_{\text{حروف مشترک}}(۳x-۲)$$

تجزیه به کمک اتحاد مربع : ۱) تعداد جملات ۳ جمله باشد ۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق داشته باشند

مثال : عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$\overset{۲x}{۴x^۲}+۴xy^۲+\overset{y^۲}{y^۴}=(۲x+y^۲)^۲$$

$$\overset{a}{a^۲}-۶a+\overset{۳}{۹}=(a-۳)^۲$$

جذر

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک : ۱) تعداد جملات ۳ جمله باشد ۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق نداشته باشند

۳) ضریب x حاصل جمع و عدد آخر حاصل ضرب دو عدد را نشان می دهد

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$x^۲\overset{\text{جمع دو عدد}}{-۱}x\underset{\text{ضرب دو عدد}}{-۱۲}=(x-۴)(x+۳)$$

$$x^۲\overset{\text{جمع دو عدد}}{-۵}x\overset{\text{ضرب دو عدد}}{+۶}=(x-۳)(x-۲)$$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج : ۱) تعداد جملات ۲ جمله باشد ۲) جملات اول و دوم جذر دقیق داشته باشند

۳) بین جملات علامت منفی باشد

درسنامه و نکات کلیدی **(فصل پنجم)** **سال نهم**

عبارت های جبری

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$x^۲$ ۴

$$x^۴ - ۱۶ = (x^۲ - ۴)(x^۲ + ۴)$$

a ۳   جذر

$$a^۲ - ۹ = (a - ۳)(a + ۳)$$

نامعادله : جواب های نامعادله مقادیری از متغیرهستند که به ازای آن ها نامساوی برقرار است. همه ی جواب های نامعادله مجموعه جواب آن گفته می شود.

نکته : اگر به طرفین یک نا مساوی عدد اضافه یا عددی کم شود جهت نابرابری عوض نمی شود :

$$a < b \Rightarrow a - c < b - c \quad , \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

نکته : اگر طرفین یک نا مساوی در عدد مثبت ضرب یا بر عدد مثبت تقسیم کنیم جهت نابرابری عوض نمی شود :

$$a > b \overset{c > ۰}{\Longrightarrow} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad , \quad a > b \overset{c > ۰}{\Longrightarrow} ac > bc$$

نکته : اگر طرفین یک نا مساوی در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم جهت نابرابری عوض می شود :

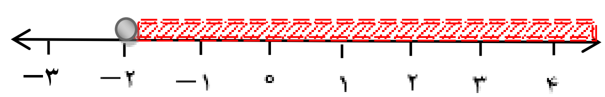
$$a < b \overset{c < ۰}{\Longrightarrow} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad , \quad a < b \overset{c < ۰}{\Longrightarrow} ac > bc$$

حل نامعادله : همانند یک معادله حل می شود با این تفاوت که اگر در اخر نامعادله ضریب مجهول عدد منفی باشد جهت نامعادله عوض می شود.

مثال : مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورده و آن ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

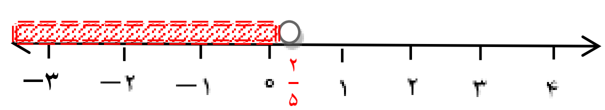
$$۴(x - ۱) \leq ۵x - ۲ \Rightarrow ۴x - ۴ \leq ۵x - ۲ \Rightarrow ۴x - ۵x \leq ۴ - ۲ \Rightarrow -x \leq ۲ \Rightarrow x \geq -۲$$

مجموعه جواب $A = \{x \in R \mid x \geq -۲\}$



$$x^۲ + \frac{x}{۲} < (x - ۱)^۲ \Rightarrow \cancel{x^۲} + \frac{x}{۲} < \cancel{x^۲} - ۲x + ۱ \Rightarrow \overbrace{\frac{x}{۲} + ۲x < ۱}^{\text{طرفین در ۲ ضرب}} \Rightarrow x + ۴x < ۲ \Rightarrow ۵x < ۲ \Rightarrow x < \frac{۲}{۵}$$

مجموعه جواب $B = \left\{x \in R \middle| x < \frac{۲}{۵}\right\}$



نکته : در مسایل مربوط به نابرابری به جای کلمه حداکثر از علامت $\leq$ و به جای کلمه حداقل از علامت $\geq$ استفاده می کنیم.

مثال : عبارت زیر را به صورت کلامی بنویسید : " مجموع دو برابر عددی با قرینه سه برابر عدد دیگر حداکثر ۹- است. "

$$۲x + (-۳y) \leq -۹$$

خط و معادله های خطی

معادله خط : رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد.

نکته : فرم کلی معادله خط به صورت $(y = ax + b)$ می باشد.

نکته : در صورتی که نمودار رابطه ی بین دو مقدار به صورت خط راست باشد. آن دو مقدار با هم رابطه خطی دارند.

مثال : آیا رابطه بین یک ضلع مربع و محیط مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ بله. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش محیط مربع یک مقدار ثابت است : (ضلع مربع را x و محیط مربع را y در نظر می گیریم پس خواهیم داشت : $y = ۴x$)

x	۱	۲	۳	۴
$y = ۴x$	۴	۸	۱۲	۱۶

مثال : آیا رابطه بین یک ضلع مربع و مساحت مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ خیر. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش مساحت مربع مقدار ثابتی نیست : (ضلع مربع را x و مساحت مربع را y در نظر می گیریم بنابرین خواهیم داشت : $y = x^۲$)

x	۱	۲	۳	۴
$y = x^۲$	۱	۴	۹	۱۶

انواع معادله خط : ۱) مبدا گذر (فرم کلی : $y = ax$) ۲) غیر مبدا گذر (فرم کلی : $y = ax + b$)

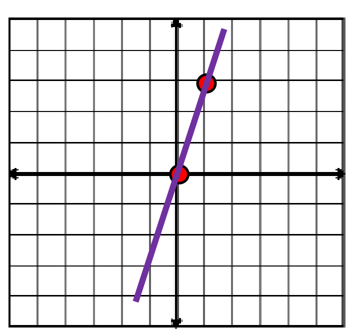
۳) خطوط موازی با محور (فرم کلی : $x = n$, $y = m$)

رسم یک خط : برای رسم یک خط در دستگاه مختصات نیاز به مختصات دو نقطه است.

نکته : اگر در فرم کلی (استاندارد) معادله خط عدد قبل از x عدد صحیح باشد در جدول به جای x اعداد (صفر و ۱) قرار می دهیم و عدد قبل از x عدد کسری باشد به جای x اعداد (صفر و مخرج کسر) قرار می دهیم.

مثال : معادله خط $y = ۳x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	۰	۱
$y = ۳x$	۰	۳

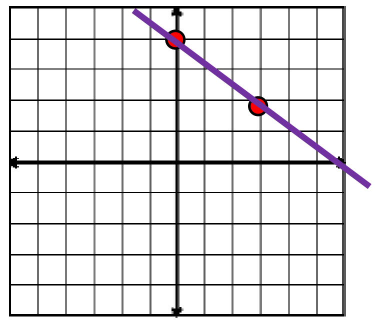


درسنامه و نکات کلیدی   **(فصل ششم)**   **سال نهم**

خط و معادله های خطی

مثال : معادله خط $y = -\frac{۲}{۳}x + ۴$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

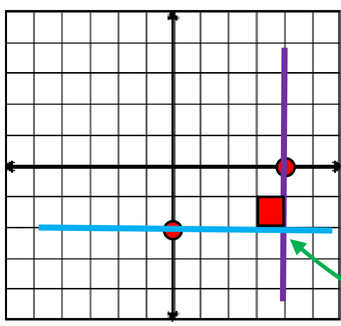
x	۰	۳
$y = -\frac{۲}{۳}x + ۴$	۴	۲



خط غیرمبدا گذر

مثال : معادلات خط $y = -۲$ و $x = ۴$ را در دستگاه مختصات رسم کنید. (برای رسم این خط ها نیاز به جدول نیست. فقط کافی است هر نقطه داده شده را در دستگاه مختصات مشخص کرد سپس خطی موازی با محور از روی آن نقطه رسم کرد.)

$x = ۴$



$y = -۲$

خط موازی با محور

زاویه ی بین خطوط موازی با محور ۹۰ درجه است.

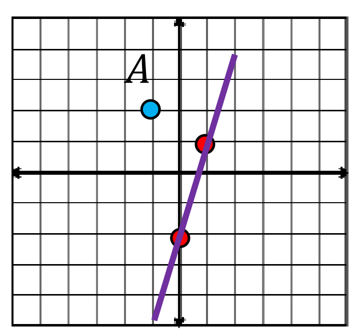
نکته : شرط این که نقطه روی یک خط قرار گیرد این است که مختصات آن نقطه در معادله خط صدق کند. که برای این کار دو روش وجود دارد : ۱) روش تحلیلی (جایگزینی مختصات نقطه در معادله خط)   ۲) روش ترسیمی

مثال : آیا نقطه ی $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ روی خط $y = ۳x - ۲$ قرار دارد؟

روش تحلیلی : قرار ندارد چون دو طرف تساوی برابر نیست : $(x = -۱ \, , y = ۲) \Longrightarrow ۲ = ۳(-۱) - ۲ \Longrightarrow ۲ \neq -۵$

روش ترسیمی : خط داده شده را در دستگاه مختصات رسم کرده سپس نقطه A را نیز در دستگاه مختصات مشخص می کنیم :

x	۰	۱
$y = ۳x - ۲$	-۲	۱

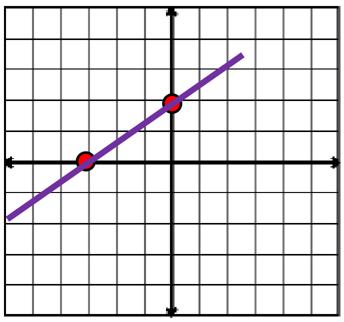


خط و معادله های خطی

نکته : برای رسم معادلات خطی که به صورت $(ax+by=c)$ هستند. در جدول یک بار به جای x و یک بار به جای y صفر قرار می دهیم.

مثال : معادله خط $2x-3y=-6$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	0	-3
$2x-3y=-6$	2	0



شیب خط: زاویه ای بین سمت راست محور طول ها با خط داده شده را می گویند.

عرض از مبدا : نقطه ای که خط داده شده محور عرض ها را در آن نقطه قطع می کند را عرض از مبدا می گویند.

نکته : در فرم کلی معادله خط $(y=ax+b)$ ضریب x یعنی عدد a شیب خط و عدد b عرض از مبدا نام دارد.

مانند : در معادله خط $y=-\frac{1}{3}x+1$ عدد $\left(-\frac{1}{3} : \text{شیب خط}\right)$ و عدد $\left(1 : \text{عرض از مبدا}\right)$ می باشد.

نکته : برای به دست آوردن شیب خط و عرض مبدا باید معادله خط به فرم کلی $(y=ax+b)$ مرتب شود.

مثال : شیب خط و عرض از مبدا معادله های خطی زیر را به دست آورید.

الف) $-5x+2y=-6$　　$2y=5x-6 \Longrightarrow \frac{2y}{2}=\frac{5x}{2}-\frac{6}{2} \Longrightarrow y=\frac{5}{2}x-3 \Longrightarrow \left(\text{عرض از مبدا}: -3 \ , \ \text{شیب خط}: \frac{5}{2}\right)$

ب) $2y=-4x$　　$\frac{2y}{2}=\frac{-4x}{2} \Longrightarrow y=-2x \Longrightarrow \left(\text{عرض از مبدا} : 0 \ , \ \text{شیب خط} : -2\right)$

طول از مبدا : نقطه ای که خط داده شده محور طول ها را در آن نقطه قطع می کند را طول از مبدا می گویند.

نکته : برای به دست آوردن طول از مبدا در معادله خط به جای y صفر قرار می دهیم.

مثال : طول از مبدا معادله خط $\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y=-5$ را به دست آورید.

$$y=0 \Longrightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}(0)=-5 \Longrightarrow \frac{2}{3}x=-5 \Longrightarrow x=\frac{-5}{\frac{2}{3}}=-\frac{15}{2} \Longrightarrow x=-\frac{15}{2} : \text{طول از مبدا}$$

(فصل ششم)

درسنامه و نکات کلیدی **سال نهم**

خط و معادله های خطی

نکته : دو خط در صورتی موازی هستند که شیب دو خط برابر باشند. **مانند :** $(y=-۳x \,, y=-۳x+۵)$

نکته : دو خط در صورتی بر هم عمود هستند که شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر باشند یا حاصل ضرب دو شیب خط برابر با عدد -۱ شود. **مانند :** $\left(y=۲x+۳ \;,\; y=-\frac{۱}{۲}x-۲\right)$

عرض از مبدا

شیب دو خط برابر

مثال : معادله خطی بنویسید که با خط $x-۳y=۵$ $\boxed{\text{موازی}}$ و از نقطه ی $A=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$ بگذرد. ابتدا معادله خط را مرتب کرده تا شیب خط مشخص شود :

$$-۳y=-x+۵ \Longrightarrow \frac{-۳y}{-۳}=-\frac{x}{-۳}+\frac{۵}{-۳} \Longrightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۳} \Longrightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

$$y=ax+b \xrightarrow{(a=\frac{۱}{۳},b=-۲)} y=\boxed{\frac{۱}{۳}x-۲}$$ معادله خط جدید

شیب دو خط قرینه و معکوس

مثال : معادله خطی بنویسید که با خط $y=-\frac{۱}{۵}x+۲$ $\boxed{\text{عمود}}$ باشد و از نقطه ی $B=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بگذرد. شیب خط مشخص است پس باید عرض از مبدا را به دست آوریم :

$$y=ax+b \xrightarrow{(a=۵,x=-۱,y=۲)} ۲=۵(-۱)+b \Longrightarrow b=۷$$

$$y=ax+b \xrightarrow{(a=۵,b=۷)} y=\boxed{۵x+۷}$$ معادله خط جدید

نکته : برای به دست آوردن شیب خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$a=\frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

مثال : معادله خطی بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$a=\frac{۴-۳}{-۱-۲}=-\frac{۱}{۳} \qquad , y=ax+b \xrightarrow{(a=-\frac{۱}{۳},x=۲,y=۳)} ۳=-\frac{۱}{۳}(۲)+b \Longrightarrow b=\frac{۱۱}{۳}$$

$$y=ax+b \xrightarrow{(a=-\frac{۱}{۳},b=\frac{۱۱}{۳})} y=\boxed{-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}}$$ معادله خط جدید

نکته : معادله خط محور طول ها $(y=۰)$ و معادله خط محور عرض ها $(x=۰)$ و معادله خط نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ و معادله خط نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ می باشد.

خط و معادله های خطی

دستگاه معادلات خطی : برای حل دستگاه معادلات خطی از روش های زیر می توان استفاده کرد :

الف) روش حذفی : در این روش یکی از متغیرها را حذف کرده سپس با جایگزینی متغیر دوم به دست می آید.

مثال : دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش حذفی)

$$۲\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{۴x} + ۶y = ۱۴ \\ \cancel{-۴x} + y = -۷ \end{cases}$$

$$۷y = ۷ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲x + ۳(۱) = ۷ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

جواب دستگاه دو مجهولی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

ب) روش جایگزینی (تبدیلی) : در این روش یکی از معادلات را بر حسب یک متغیر مرتب کرده و مقدار آن را در معادله دوم قرار می دهیم.

مثال : دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش جایگزینی)

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = -۳y + ۷ \Rightarrow \boxed{x = -\frac{۳}{۲}y + \frac{۷}{۲}} \\ -۴\left(-\frac{۳}{۲}y + \frac{۷}{۲}\right) + y = -۷ \Rightarrow ۶y - ۱۴ + y = -۷ \Rightarrow ۷y = ۷ \Rightarrow y = ۱ \end{cases}$$

(بر حسب x مرتب می کنیم)

(مقدار x را در معادله پایینی قرار می دهیم)

$$x = -\frac{۳}{۲}(۱) + \frac{۷}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲} + \frac{۷}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow x = ۲$$

جواب دستگاه دو مجهولی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

نکته : برای حل بعضی از مسایل می توان از دستگاه دو مجهولی استفاده کرد و به یکی از روش های آن را حل کرد.

مثال : سن برادر علی ۳ برابر سن او است. و اختلاف سن آن ها ۱۸ سال است. سن هر یک را به دست آورید. (روش جایگزینی)

(سن برادر علی را x و سن علی را y فرض می کنیم.)

$$\begin{cases} x = ۳y \\ x - y = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳y \\ ۳y - y = ۱۸ \Rightarrow ۲y = ۱۸ \Rightarrow \boxed{y = ۹} \end{cases}$$

سن علی

$$x = ۳(۹) = ۲۷ \Rightarrow \boxed{x = ۲۷}$$

سن برادر علی

(فصل هفتم)

درسنامه و نکات کلیدی **سال نهم**

عبارت های گویا

عبارت گویا : کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

مانند : $\frac{x-۳}{x}, \frac{\sqrt{۵}x}{۲}, \frac{۴x^{۲}-۱}{۲x+۳}$

نکته : عبارتی که متغیر آن توان منفی یا زیر رادیکال یا داخل قدر مطلق یا در مخرج کسر یا در توان باشد. گویا نیست.

مانند : $\frac{۴-\sqrt{x}}{۳x}, \frac{x^{y}}{۳}, |x-۲|$

نکته : عبارت گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می کند تعریف نشده است.

مثال : عبارت های گویا زیر به ازای چه مقادیری از مخرج کسر تعریف نشده است.

(مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده تا مقادیر تعریف نشده مشخص شوند)

$$\frac{x^{۲}-۵}{۲x-۴} \Longrightarrow ۲x-۴=۰ \Longrightarrow ۲x=۴ \Longrightarrow x=۲$$
(عبارت گویا به ازای $(x=۲)$ تعریف نشده است)

$$\frac{x-۴}{x^{۲}-۴x} \Longrightarrow x^{۲}-۴x=۰ \overset{\text{فاکتورگیری}}{\Longrightarrow} x(x-۴)=۰ \Longrightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۴=۰ \Longrightarrow x=۴ \end{cases}$$

(عبارت گویا به ازای $(x=۰, x=۴)$ تعریف نشده است)

ساده کردن عبارت گویا : برای ساده کردن صورت و مخرج را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری نوشته سپس عبارت های مساوی را از صورت و مخرج ساده می کنیم.

نکته : برای ساده کردن عبارت های گویا از فاکتورگیری و اتحاد استفاده می کنیم.

مثال : عبارت های گویا زیر را ساده کنید.

$$\frac{\overset{\text{اتحاد جمله مشترک}}{x^{۲}-۵x+۶}}{\underset{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}{x^{۲}-۶x+۹}} = \frac{\cancel{(x-۳)}(x-۲)}{(x-۳)\cancel{(x-۳)}} = \frac{(x-۲)}{(x-۳)}$$

$$\frac{\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{x^{۲}-۴}}{\underset{\text{فاکتورگیری}}{x^{۲}+۲x}} = \frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}{x\cancel{(x+۲)}} = \frac{(x-۲)}{x}$$

ضرب عبارت های گویا : در ضرب عبارت های گویا ابتدا ساده می کنیم سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می کنیم.

تقسیم عبارت های گویا : ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم یعنی کسر اولی را در معکوس کسر دومی ضرب می کنیم.

عبارت های گویا

مثال : حاصل ضرب و تقسیم عبارت های گویا زیر را به دست آورید.

$$\frac{x+5}{3x+6}\times\frac{x+2}{x^2-25}=\frac{\cancel{(x+5)}}{3\cancel{(x+2)}}\times\frac{\cancel{(x+2)}}{(x-5)\cancel{(x+5)}}=\frac{1}{3(x-5)}$$

$$\frac{x^2-2x-15}{x+3}\div\frac{x^2-x-12}{2x+6}=\frac{(x-5)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}\times\frac{2\cancel{(x+3)}}{(x-4)\cancel{(x+3)}}=\frac{2(x+5)}{(x-4)}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا : بین مخرج ها مخرج مشترک (ک.م.م) مخرج ها را انتخاب می کنیم.

مثال : حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\frac{2x+3}{x+1}+\frac{x-4}{x-2}=\frac{(2x+3)(x-2)+(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{3x^2-4x-10}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-9}=\frac{(x-1)(x+3)-(x+5)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+x-8}{(x-3)(x+3)}$$

ساده کردن عبارت های مرکب : عبارت صورت کسر و عبارت مخرج کسر را جداگانه جواب داده و در آخر حاصل عبارت صورت را برحاصل عبارت مخرج تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+1}{1-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3-4x+x^2}{x^2}}{\frac{x^2-6-x}{x^2}}=\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{x^2}}\times\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{(x-3)}(x+2)}=\frac{(x-1)}{(x+2)}$$

تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای : ۱) علامت ها در هم ضرب شده ۲) اعداد با هم ساده می شوند ۳) حروف (متغیرها) با هم ساده می شوند : (در ساده کردن متغیرها از قاعده تقسیم اعداد توان دار استفاده می شود)

مثال : عبارت گویا زیر را ساده کنید.

$$\frac{-18x^5y^2z^4}{12x^3y^3z^4}=\frac{-18}{12}\times\frac{x^5}{x^3}\times\frac{y^2}{y^3}\times\frac{z^4}{z^4}=-\frac{3x^2}{2y}$$

عبارت های گویا

تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای : تک تک جملات صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می کنیم.

مثال : عبارت گویا زیر را ساده کنید.

$$\frac{4x^5 - 6x^3 + 12x}{2x} = \frac{4x^5}{2x} - \frac{6x^3}{2x} + \frac{12x}{2x} = 2x^4 - 3x^2 + 6$$

تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای : برای این تقسیم مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد یعنی از بیشترین توان به کمترین توان می نویسیم.

۲) اولین جمله ی مقسوم را بر اولین جمله ی مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم.

۳) خارج قسمت را در تک تک جملات مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را زیر عبارت مقسوم نوشته و دو عبارت را از هم کم می کنیم.

۴) برای چند جمله ای به دست آمده مراحل ۲ و ۳ را تکرار کنیم و این تکرار را تا جایی ادامه می دهیم که درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : خارج قسمت و باقی مانده تقسیم $4x - x^2 + 7 + 2x^2 \div x - 2$ زیر را به دست آورید.

مرحله اول (استاندارد کردن عبارت) : $4x - \underline{x^2} + 7 + \underline{2x^2} = x^2 + 4x + 7$

مرحله دوم (تقسیم مقسوم بر مقسوم علیه) : $\frac{x^2}{x} = x$

مرحله سوم (حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه) : $x(x-2) = x^2 - 2x$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 4x + 7 & x - 2 \\ \cline{2-2} -(x^2 - 2x) & \boxed{x + 6} \\ \cline{1-1} 6x + 7 & \\ -(6x - 12) & \\ \cline{1-1} \boxed{19} & \end{array}$$

خارج قسمت

باقی مانده

رابطه تقسیم : $(x-2)(x+6) + 19 = x^2 + 4x + 7$

نکته : اگر در تقسیم دو عبارت باقی مانده صفر شود. مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر است.

مثال : مقدار a طوری بیابید که چند جمله ای $x^4 - 3x^2 + a - 3$ بر $x^2 - 5$ بخشپذیر باشد.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^2 + a - 3 & x^2 - 5 \\ \cline{2-2} -(x^4 - 5x^2) & x^2 + 2 \\ \cline{1-1} 2x^2 + a - 3 & \\ -(2x^2 - 10) & \\ \cline{1-1} a + 7 & \end{array}$$

بخشپذیر بودن یعنی باقی مانده تقسیم صفر شود :

$$a + 7 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -7}$$

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل هشتم)

سال نهم

حجم و مساحت

حجم : مقدار فضایی را که یک جسم اشغال می کند حجم (گنجایش) نام دارد و حجم را با حرف انگلیسی (v) نشان می دهند.

انواع حجم : ۱) حجم منشوری ۲) حجم هرمی یا مخروطی ۳) حجم کروی

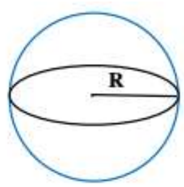
دایره : مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز دایره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع دایره) می گویند.

مرکز
دایره
شعاع

نکته : دایره را به اختصار به صورت $C(O\,,R)$ نشان می دهند.

کره : مجموعه نقاطی از فضا که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز کره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع کره) می گویند.

مانند : کره زمین و توپ



فرمول حجم کره : $v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ **فرمول مساحت کره :** $s = ۴\pi r^{۲}$

مثال : حجم و مساحت کره با قطر ۴ سانتی متر را به دست آورید.

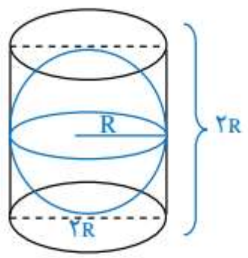
$$\begin{cases} v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۲^{۳} = ۳۳/۴۹ \\ s = ۴\pi r^{۲} = ۴ \times ۳/۱۴ \times ۲^{۲} = ۵۰/۲۴ \end{cases}$$

شعاع کره $۴ \div ۲ = ۲$

مثال : نسبت عددی حجم کره به مساحت کره چند است.

$$\frac{v}{s} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۱}{۳}r$$

نکته : اگر کره به طور کامل داخل استوانه قرار گیرد. می گوییم کره بر استوانه محاط شده و استوانه بر کره محیط شده است.



حجم و مساحت

مثال : کره ای در استوانه ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است : شعاع کره $۶ \div ۲ = ۳\ cm$

الف) حجم کره را به دست آورید. $v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۳^۳ = ۱۱۳/۰۴\ \ cm^۳$

ب) حجم استوانه را به دست آورید. $v = s \times h = (۳ \times ۳ \times ۳/۱۴) \times ۶ = ۱۶۹/۵۶\ \ cm^۳$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید. $۱۶۹/۵۶ - ۱۱۳/۰۴ = ۵۶/۵۲\ \ cm^۳$

نکته : از دوران نیم دایره حول قطر کره حاصل می شود.

نکته : از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود.

نکته : برای به دست آوردن حجم نیم کره می توان از رابطه ی $v = \frac{۲}{۳}\pi r^۳$ استفاده کرد.

مثال : حجم حاصل از دوران ربع دایره حول شعاع ۴ سانتی متر را به دست آورید. (بر حسب π)

(از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود) $v = \frac{۲}{۳}\pi r^۳ = \frac{۲}{۳}\pi \times ۴^۳ = ۴۲/۶۶\ \pi$

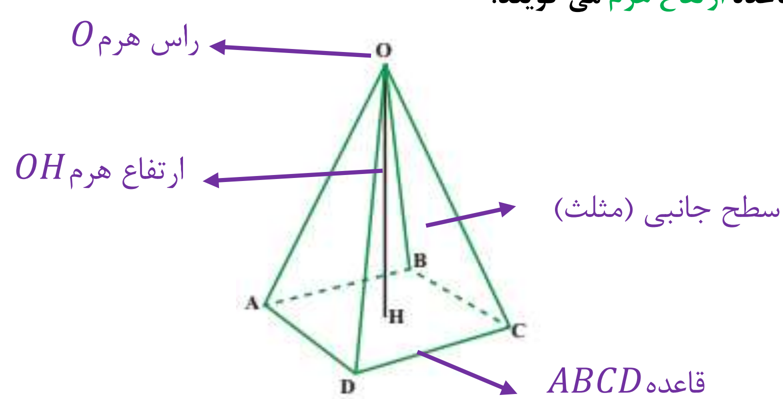
نکته : اگر شعاع کره را n برابر کنیم مساحت کره $n^۲$ و حجم کره $n^۳$ برابر خواهد شد.

مثال : اگر شعاع کره ای را ۴ برابر کنیم مساحت و حجم کره چند برابر خواهد شد.

$v = n^۳ = ۴^۳ = ۶۴$ برابر		$s = n^۲ = ۴^۲ = ۱۶$ برابر

هرم : شکل فضایی که سطح جانبی آن مثلث و وجه زیرین (قاعده) آن چند ضلعی محدب باشد.

نکته : به فاصله راس هرم تا قاعده ارتفاع هرم می گویند.



درسنامه و نکات کلیدی **(فصل هشتم)** **سال نهم**

حجم و مساحت

حجم هرم : الف) کلامی : $\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

ب) جبری : $v = \frac{۱}{۳} s.h$

مثال : حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵ سانتی متر و ارتفاع ۶ سانتی متر را به دست آورید.

مساحت مربع

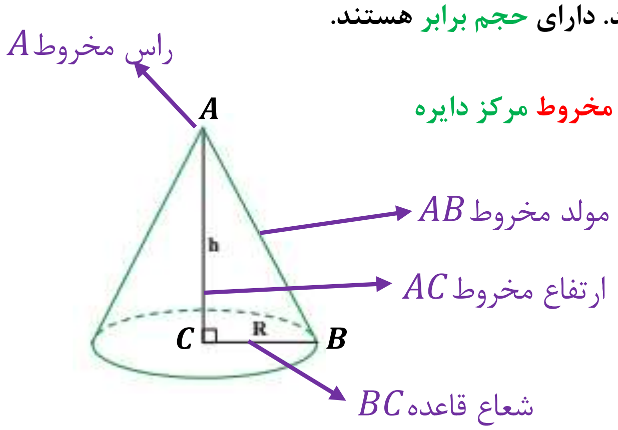
$$v = \frac{۱}{۳} s.h = \frac{۱}{۳} \times (۵ \times ۵) \times ۶ = ۵۰\ cm^۳ \qquad \left(s = \text{یک ضلع} \times \text{خودش} \ \text{مربع}\right)$$

مثال : قاعده لوزی با قطرهای ۶ و ۸ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۵ سانتی متر باشد حجم هرم چند سانتی متر مکعب است.

مساحت لوزی

$$v = \frac{۱}{۳} s.h = \frac{۱}{۳} \times \left(\frac{۶ \times ۸}{۲}\right) \times ۵ = ۴۰\ cm^۳ \qquad \left(s = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲} \ \text{لوزی}\right)$$

نکته : اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع یکسان باشند. دارای حجم برابر هستند.

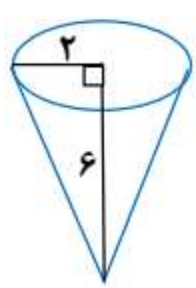


مخروط : شکلی شبیه ای هرم منتظم که قاعده آن دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز دایره باشد.

حجم مخروط : الف) کلامی : $\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

ب) جبری : $v = \frac{۱}{۳} s.h = \frac{۱}{۳} \pi r^۲ h$

مثال : حجم مخروط زیر را حساب کنید.



$$v = \frac{۱}{۳} \pi r^۲ h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۲^۲ \times ۶ = ۲۵/۱۲\ cm^۳$$

حجم و مساحت

مثال : گنجایش مخروطی ۴۷۱۰۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ۳ متر باشد ارتفاع مخروط چند متر است.

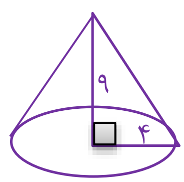
(هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.)

$$\text{حجم مخروط} \quad ۴۷۱۰۰ \div ۱۰۰۰ = ۴۷/۱\ m^{۳}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h \Longrightarrow ۴۷/۱ = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۳^{۲} \times h \Longrightarrow h = \frac{۴۷/۱}{۹/۴۲} = ۵\ m$$

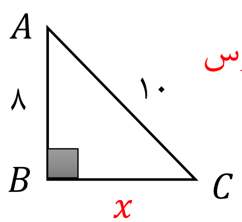
نکته : از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن مخروط حاصل می شود. ضلعی که دوران روی آن انجام شده است ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعده نام دارد.

مثال : مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم ۴ و ۹ سانتی متر را روی ضلع بزرگتر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل چند سانتی متر مکعب است.



$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۴^{۲} \times ۹ = ۱۵۰/۷۲\ cm^{۳}$$

مثال : مثلث قائم الزاویه ABC را روی حول ضلع AB دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



$$\text{شعاع قاعده} \quad x^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Longrightarrow x = ۶ \quad : \text{رابطه فیثاغورس}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۶^{۲} \times ۸ = ۳۰۱/۴۴\ cm^{۳}$$

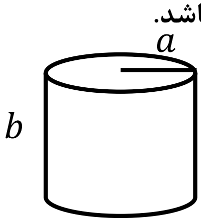
نکته : از دوران مستطیل و مربع حول یک ضلع آن استوانه تشکیل می شود.

نکته : مساحت جانبی و مساحت کل استوانه از رابطه های زیر به دست می آید :

$$\text{مساحت جانبی} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} \Longrightarrow s = p \times h$$

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت دو قاعده} \Longrightarrow s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + s_{\text{دو قاعده}}$$

مثال : نسبت حجم به مساحت کل استوانه ای را به دست آورید که شعاع قاعده آن a و ارتفاع آن b باشد.



$$v = s \times h = (a \times a \times \pi) \times b = \pi a^{۲} b$$

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۲ \times a \times \pi) \times b = ۲\pi ab$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + s_{\text{دو قاعده}} = ۲\pi ab + ۲a^{۲}\pi = ۲\pi a(b + a)$$

$$\frac{v}{s} = \frac{\pi a^{۲} b}{۲\pi a(a + b)} = \frac{ab}{۲(a + b)}$$